Решение уравнения колебаний струны методом разделения переменных.

Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Проведем изложение этого метода для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах.

Поставим задачу: найти решение уравнения

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

и начальным условиям:

Уравнение линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Будем искать решение уравнения в виде произведения

где функция только переменной функция только переменной

Подставляя в уравнение , получаем

 .

Правая часть равенства является функцией только от переменного , а левая только . Фиксируя, например, некоторое значение и меняя (или наоборот), получим, что правая и левая части равенства при изменении аргументов сохраняют постоянное значение

Из получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций :

Граничные условия (2) дают:

Отсюда, функция должна удовлетворять дополнительным условиям . Мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях: найти те значения параметра, при которых существует нетривиальное решение задачи

 а также найти эти решения. Такие значения параметра называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями задачи .

Рассмотрим случаи, когда параметр отрицателен, равен нулю и положителен.

1. При задача не имеет нетривиальных решений. Действительно, общее решение уравнения имеет вид

 Граничные условия дают:

а так как действительно и положительно, то

Следовательно,

 0

1. При задача также не имеет нетривиальных решений. Общее решение уравнения имеет вид:

Граничные условия:

 0

1. При общее решение уравнения

Граничные условия:

Если , то поэтому

где любое целое число.

Нетривиальные решения задачи возможны при . Этим собственным значениям соответствуют собственной функции

где произвольная постоянная. Этим же значениям соответствуют решения уравнения

где произвольные постоянные. Тогда функции

являются частными решениями уравнения Эти решения могут удовлетворять начальным условиям только для частных случаев начальных функций Сумма частных решений равна

Начальные условия позволяют определить Потребуем, чтобы функция удовлетворяла начальным условиям

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция заданная в промежутке разлагается в ряд Фурье:

Если функции удовлетворяют условиям разложения в

ряд Фурье, то

Положим. Тогда выполняются начальные условия и полностью определяется функция , дающая решение исследуемой задачи.

Модель коллективного поведения Краснощекова.

**Выборы.** Рассмотрим ситуацию выборов президента в России. И пусть выбирают президента не на съезде, а всенародно. Данная ситуация отличается от других ситуаций, к которым применялась модель коллективного поведения, в частности от случая голосования в парламенте. Исследуем, дает ли модель возможность проанализировать и данные события.

Сначала необходимо понять, что представляет собой коллектив взаимных влияний, в котором решается проблема выбора. Всенародность - понятие довольно расплывчатое, если под ним подразумевать все население страны, то задача становится безнадежной. Поэтому необходимо определить ту элементарную общественную ячейку, в которой принимаются основные решения. Примем за такую ячейку семью. Рассмотрим среднюю семью, состоящую из четырех человек. Также включим в ее состав “на равных правах” телевизор. В выборах он и не участвует, но тем не менее у него есть твердое и определенное мнение он целиком на стороне ныне здравствующего президента. Итак, в данной условной семье пять субъектов. Один из них, далее именуемый как телевизор, имеет следующие параметры:. Остальных членов семьи мы не будем различать по персоналиям и положим: . В данном случае используем вариант модели, в которой система уравнений принимает вид

Система имеет аналитическое решение:

 где математическое ожидание числа индивидуумов, перешедших в данное состояние;

 вероятность того, что индивид готов перейти в состояние до просмотра агитационной программы по телевизору, предварительное решение;

 вероятность того, что индивид готов перейти в состояние после просмотра агитационной программы по телевизору, окончательное решение индивидуума;

 вероятность того, что в данной конкретной ситуации индивид ведет себя, как независимый(то имеет место абсолютная независимость, абсолютная зависимость);

символ Кронекера

 Из формул получаем:

При получаем:

Определимся с параметрами Пусть , считая, что индивид “средне зависимый”, а параметр, т.к. телевизор был всецело на стороне нынешнего президента.

Всю выборную компанию можно разбить на три этапа. В первом этапе до начала официальной предвыборной компании телевизор пытался убедить избирателей, что альтернативы нет. Второй этап совпадал с официальной предвыборной кампанией перед первым туром. На этом этапе пропаганда усиливалась. Третий этап перед вторым туром ни в чем не уступал второму этапу - давление на избирателей нарастало.

Принимая вышесказанное как рабочую гипотезу, займемся исследованием этапов. На каждом этапе будем использовать формулу . Причем, как и в задаче о переговорах, будем считать, что апостериорная вероятность в конце предыдущего этапа становится априорной в начале следующего. На всех этапах у телевизора .

Теперь формулу (5) можно представить в виде

Величина вероятности , как это видно из представляет собой долю избирателей, готовых проголосовать за действующего президента. В согласии с телевизором будем называть ее рейтингом действующего президента.

Так как целью исследования данной ситуации является оценка роли телевидения в выборной компании, то намеренно занизим рейтинг президента перед первым этапом: Тогда по формуле телевизор к концу первого этапа перед официальной предвыборной кампанией создаст президенту рейтинг , т.е. избирателей будут готовы подать свои голоса за президента.

К концу второго этапа, к первому туру выборов из следует, голосов будут отдано за действующего президента, т.е. . В действительности за президента в рассматриваемым нами выборах в первом туре было отдано голосов. Расхождение в результатах не превышает относительная погрешность равна , т.е. порядка .

На третьем этапе происходило перераспределение голосов избирателей, отданных за не прошедших во второй тур кандидатов. Данная схема таких тонкостей не улавливает. Если же этими нюансами пренебречь, то дает следующий результат по второму туру: , т.е. голосов. Таким образом, из данной схемы следует, что телевизора оказалось недостаточно, чтобы президент выиграл выборы во втором туре.

Существуют еще некоторые данные, на которых можно проверить формулу . А именно: опросы избирателей об их намерениях прийти к избирательным урнам и фактический процент явки в первом туре. По опросам получалось так, что к началу первого этапа посетить избирательные участки собиралось примерно избирателей. Телевидение всячески старалось убедить граждан повысить процент явки. Формула показывает, что к началу второго этапа, т.е. к открытию ‘официальной предвыборной компании телевизору удалось повысить эту величину до . Используя формулу и на втором этапе, получим прогноз процента явки избирателей на первый тур выборов. Элементарный подсчет дает величину, равную . Официально опубликованная величина составляет т.е. имеет место хорошее совпадение с прогнозом.